

Уроки продуктивного навчання. Парність

Матеріал, що пропонується, починає цикл статей "Уроки продуктивного навчання" в розділі "Математичний гурток. Готуймося до олімпіад, конкурсів, турнірів". Визначившись у попередньому номері з нашим підходом до продуктивності освіти, висловимо ще кілька загальних міркувань. Ми обрали об'єднуючу назву "уроки", розуміючи під словом "урок" час, відведений на навчання чогось або те повчальне, з чого можна здобути певні корисні висновки на майбутнє. В широкому розумінні, близькому до освіти, вживаємо і слово "навчання", вкладаючи в нього перш за все – вчення (учіння, самонавчання) – процес набуття знань і вмінь учнем. Продуктивне вчення додає до нього вмотивованість, зацікавленість, цілеспрямованість на початку і обов'язкову результативно-діяльнісну складову як завершальний етап – набуття учнем певного досвіду розв'язання визначених проблем, практичного застосування здобутих знань, готовність і здатність до самовизначення, самоорганізації, вибудовування власної освітньої траєкторії. По-друге, це безпосередній процес навчання – створення умов для виконання кожним своєї освітньої програми: організаційне і змістове наповнення навчального процесу, його методичне забезпечення, а також психолого-педагогічний супровід, підтримка учнів з метою максимальної комфортності й ефективності процесу набуття ними пізнавальних, комунікативних, громадянських компетентностей.

Головна мета наших уроків – розвиток творчого потенціалу школярів, їх здатності до плідної розумової діяльності.

Ми намагались підібрати завдання так, щоб більшість із них була доступною і цікавою для учнів 6–8 класу, тих, хто ще не втратив природної допитливості та бажання вчитись. У повній мірі говорити про свідоме самовизначення школяра у такому віці ще зарано, то ж наша головна задача – відкрити радість творчості, задоволення від успіху, навчити долати труднощі й радіти своїм перемогам. Тут, безумовно, ми покладаємось на вчителів: їх знання та досвід, ентузіазм, захопленість предметом, бажання передати її своїм вихованцям.

Перша тема, винесена на розгляд, – парність. Це одна з основних тем, яка використовується при розв’язуванні олімпіадних завдань. Досить прості ідеї парності проникли майже в усі розділи математики, ставши потужним методом розв’язання різних за складністю та тематикою задач.

Мета цієї статті – перше знайомство з парністю, добірка основних фактів та прикладів їх практичного використання. Автори подають повне розв’язання всіх завдань, надаючи кожному можливість самостійно визначитись із технологією їх опрацювання. У наступній статті ми продовжимо тематику парності, розглянемо питання, тісно зв’язані з нею: чергування, розбиття на пари, графи, симетрія та інваріанти.

За означенням ціле число називають парним, якщо воно ділиться без остачі на 2. Такі числа мають загальний вид $2n$, де n – деяке ціле число. Непарні числа, тобто цілі числа, які при діленні на 2 дають залишок 1, записують у вигляді $2n+1$, де n – деяке ціле число.

Варто звернути увагу на такі основні моменти:

- сума довільного числа парних чисел парна;
- сума парного числа непарних чисел – парне число;
- сума непарної кількості непарних чисел – непарне число;
- сума парного і непарного чисел непарна.

Отже, парний доданок не змінює парності суми, або парність виразу не змінюється при додаванні парного доданку. Це основне твердження щодо операції додавання цілих чисел можна записати у вигляді:

I. Парність виразу $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_n$ залежить тільки від парності кількості непарних доданків: якщо таких доданків парне число, тоді значення виразу парне; якщо непарних доданків непарна кількість, тоді значення виразу непарне.

Щодо операції множення:

- замкненість множини парних чисел відносно множення;
- замкненість множини непарних чисел відносно множення.

II. Добуток будь-якого цілого числа на парне – парний, або якщо добуток цілих чисел непарний, то всі співмножники непарні.

Звідси, добуток двох послідовних цілих чисел завжди парний, бо одне з них ділиться на два.

III. Знак добутку ненульових множників залежить тільки від парності числа від'ємних множників у ньому: якщо від'ємних множників непарна кількість, то добуток має знак "-", якщо ж від'ємних множників парна кількість, то добуток додатний.

Ці, здавалося б, прості факти часто залишаються поза увагою при розв'язанні завдань. Ми ж радимо ретельно опрацювати й закріпити їх, щоб у подальшому бачити, відчувати цю іноді досить глибоко приховану властивість. І тоді ідея парності щедро віддячить, розкривши свої блискучі можливості, дозволить одержати простий спосіб розв'язання іноді непростієї задачі.

1. На восьми карточках записані числа від 1 до 8 – по одному на кожній карточці. Розкласти ці карточки на дві групи так, щоб суми чисел у цих групах були рівні між собою.

Розв'язання. 1, 2, 3, 5, 7 та 4, 6, 8. (Варто з'ясувати, чи є інші способи.)

2. На десяти карточках записані числа від одного до десяти – по одному на кожній карточці. Чи можна розкласти ці карточки на дві групи так, щоб суми чисел у цих групах були рівні між собою?

Розв'язання. Сума чисел від 1 до 10 – непарна, бо до цієї суми входять 5 непарних чисел: 1, 3, 5, 7, 9 (інший спосіб полягає у тому, щоб знайти суму чисел від 1 до 10: $1+2+\dots+9+10=(10+1)+\dots+(6+5)=11\cdot 5=55$). Тому розділити дані карточки на дві групи з рівними сумами не можна.

Бажано, продовжуючи дослідження, з'ясувати, на які числа можна замінити числа 8 та 10 в умовах попередніх задач, щоб розбиття чисел на дві групи з рівними сумами було можливим (неможливим)?

3. На 20 картках записані числа від 1 до 20 – по одному на кожній картці. Чи можна розкласти ці картки на дві групи так, щоб сума чисел у першій групі була на 13 більша, ніж у другій?

Розв'язання. Припустимо, що це можливо. Тоді позначимо суму чисел першої групи через x . При цьому сума чисел другої групи дорівнює $x-13$. Сума всіх на-

туральних чисел від 1 до 20 (позначимо її через S) – парна ($S = 21 \cdot 10$). Тоді $x + (x - 13) = S = 210$, або $2x - 210 = 13$. Числа в лівій і правій частинах рівності мають різну парність. Одержали протиріччя. Отже, припущення не виправдалось і розбиття неможливе.

При подальшому узагальненні (заміні 20 на m , 13 на k , $k < m$; $k, m \in \mathbb{N}$) доречно ще раз нагадати зручний спосіб обчислення суми послідовних натуральних чисел: $p + (p + 1) + (p + 2) + \dots + (p + i) = \frac{p + (p + i)}{2}(i + 1)$, причому міркування повністю зберігаються при будь-якому наборі послідовних натуральних чисел на карточках (не обов'язково починаючи з 1).

4. Довести, що якщо добуток 2009 чисел є число непарне, то сума цих чисел також непарне число.

Розв'язання. Поміркуємо, якими можуть бути числа, якщо їх добуток непарний? Очевидно, що всі вони непарні. А сума непарного числа непарних чисел – непарна, бо лише парами (тобто коли загальна кількість непарних чисел парна!) вони в сумі дають парне число.

Відмітимо, що якщо завдання видається складним для 2009 множників, то його можна почати розв'язувати для добутку 3 множників, потім 5 множників, а потім перейти до 2009. Таким чином, ідею розв'язання даної задачі можна відчувати, розв'язуючи аналогічну задачу з меншим числом множників.

5. Довести, що якщо сума 2010 чисел непарна, то добуток цих чисел парний.

Розв'язання. З'ясуємо, чи можуть бути непарними всі 2010 чисел, якщо їх сума непарна? Не можуть! Бо сума парного числа непарних чисел парна, а у нас число непарне. Тому хоча б одне з чисел є парним. Отже, і добуток всіх чисел парний.

6. Чи можна підібрати 4 цілих числа, сума і добуток яких – непарні числа?

Розв'язання. Якщо добуток цілих чисел непарний, то всі ці числа непарні. Але сума 4-х непарних чисел парна, отже, знайти такі числа ми не зможемо.

7. Довести, що сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4 і навпаки, кожне число, що ділиться на 4, можна подати у вигляді суми двох послідовних непарних чисел.

Розв'язання. Можна використати загальний вигляд послідовних непарних чисел:
 $(2k - 1) + (2k + 1) = 4k$.

Розглянемо ще одне завдання.

8. Нехай a, b – довільні цілі числа. Довести, що число $ab(a + b)$ – парне.

Розв'язання. Якщо хоча б одне з чисел парне, то й добуток чисел парний. Якщо вони обидва непарні, тоді їх сума – парне число. То ж у будь-якому випадку даний добуток – парне число.

Спробуємо узагальнити результат попереднього завдання.

9. Нехай a, b, c – довільні цілі числа. Розглянемо вираз $abc(a + b)(a + c)(b + c)$.

Чи буде він парним?

Розв'язання 1. Якщо хоча б одне з цілих чисел a, b, c є парним, то, очевидно, їх добуток парний. Якщо ж всі числа непарні, то зрозуміло, що кожна дужка буде парною, а отже, і весь вираз також буде парним.

Розв'язання 2. Вираз $ab(a + b)$, розглянутий в попередній задачі для двох чисел a і b , зустрічається як співмножник і в цьому завданні. Оскільки $ab(a + b)$ за доведеним є парним, то і вираз $abc(a + b)(a + c)(b + c)$ також буде парним, при будь-якому цілому c .

10. Чи існують цілі числа a, b такі, що $ab(a + 5b) = 13013$?

Розв'язання. Не існують (задача 8), бо число $a + 5b$ має таку ж парність, як і $a + b$.

11. Різницю двох цілих чисел помножили на їх добуток. Чи могли одержати число 45045?

Розв'язання. Не могли, бо, як і в завданні 8, результат є парним. (Можна врахувати той факт, що сума і різниця двох цілих чисел мають однакову парність.)

12. Позначимо через A суму трьох послідовних цілих чисел, а через B – суму наступних трьох цілих чисел. Чи може добуток $A \cdot B$ дорівнювати 111 111 111?

Розв'язання. Числа A і B , очевидно, мають різну парність. Отже, не може.

13. Чотири цілих числа задовольняють співвідношення $a = bc + d$. Доведіть, що хоча б одне із них парне.

Розв'язання. Припустимо, що всі числа a, b, c, d непарні. Тоді добуток bc непарний, а сума $bc + d$ парна, і вона не може дорівнювати непарному числу a . Одержане протиріччя свідчить, що наше припущення хибне. Отже, хоча б одне із даних чисел має бути парним.

14. Чи існують цілі числа a, b, c такі, що $(3a - b)(3b - c)(3c - a) = 5005$?

Розв'язання. Серед трьох чисел два завжди мають однакову парність, нехай, наприклад, це числа a і b . Тоді різниця $3a - b = 2a + a - b$ парна, тобто даний за умовою добуток буде парним числом. Отже, відповідь така: не існують, бо при будь-яких цілих a, b, c результат має бути парним.

Зазначимо, що перше речення розв'язання (а саме в ньому – основна ідея розв'язання) це пряме використання принципу Діріхле. І вчитель, керівник математичного гуртка для учнів будь-якого віку обов'язково має познайомити гуртківців з цим важливим, особливо в олімпіадній математиці, принципом. Разом із цим його тлумачення, наприклад, мовою кліток із зайцями є цілком посильним і зрозумілим дітям.

15. Чи може сума $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot M + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot K$, де M і K – натуральні числа, не менші трьох, закінчуватися на 9?

Розв'язання. Ні, обидва доданки парні (містять множник 2), отже, їхня сума парна і не може закінчуватися на 9. Можна відмітити, що для скорочення запису добутку послідовних натуральних чисел від 1 до M у математиці застосовують позначення $M!$ ($M! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot M$, читається " M факторіал").

16. Андрій придбав зошит обсягом 48 аркушів і пронумерував всі сторінки числами від 1 до 96. Потім навмання відмітив 15 аркушів і склав написані на них числа. Чи міг він отримати 2010?

Розв'язання. Сума чисел на кожному аркуші непарна. Сума 15 непарних чисел – непарна. Тому Андрій не міг отримати парне число 2010.

17. Чи можна розміняти банкноту вартістю 50 гривень за допомогою 17 банкнот вартістю 1 або 5 гривень?

Розв'язання. Сума непарного числа непарних натуральних чисел є непарне число. 50 – парне число. Отже, не можна.

Зазначимо, що завдання із негативною відповіддю і відповідним налаштуванням на пошук протиріччя слід "розбавляти" конструктивними вправами зі схожою умовою але позитивним результатом. Наприклад,

18. Чи можна розміняти 500 гривень за допомогою 151 купюри вартістю 1, 5 і 10 гривень?

Розв'язання. Можна, наприклад, 80 купюр по 1 гривні, 58 по 5 і 13 по 10 гривень.

Кілька подібних завдань можна запропонувати для домашнього розв'язання. Як приклад наведемо такі.

19. Таня має 3 плитки шоколаду. Чи може Таня, поділивши кожну плитку на 3, 5 або 9 шматочків, отримати 20 шматків шоколаду?

Розв'язання. Ні, бо 20 – парне число, а із кожної плитки можна отримати лише непарну кількість шматочків і сума трьох непарних чисел також непарна.

20. Чи можуть 10 іграшок вартістю 3, 5 або 7 гривень коштувати 53 гривні?

Розв'язання. Сума парної кількості непарних чисел парна. Ми маємо 10 іграшок, вартість кожної – непарне число, отже, їх загальна вартість парна. Число 53 – непарне і бути сумою 10 непарних чисел воно не може.

Зазначимо, що конкретні числові значення вартості в останній задачі чи відповідні сюжетні дані в попередніх можна варіювати, залишаючи їх непарними, й у такий спосіб підготувати різні комплекти завдань для домашнього опрацювання. Головна мета такого прийому – аналізуючи одержані розв'язання на наступному занятті, підкреслити, що всі ці різні за фабулою задачі мають спільну модель розв'язання – певне діофантове рівняння. До того ж ідеї парності є потужним методом розв'язання цих традиційно олімпіадних завдань.

Можна розглянути і кілька окремих діофантових рівнянь, як, наприклад

21. Чи мають розв'язки в натуральних числах рівняння:

1). $x(x+1) = 2009$, 2). $x^2 - y^2 = 2010$, 3). $x^3 - y^3 = 2011$, 4). $x(x+1)(x+2) = 2012$?

Розв'язання. В усіх прикладах відповідь негативна. В першому при будь-якому натуральному x права частина є парним числом, а ліва – непарним. У двох наступних розкладемо ліву частину на множники. Корені рівняння 2) слід шукати серед чисел однакової парності, бо інакше, добуток їх суми і різниці – непарний, а права

частина рівняння – парна. Для чисел x і y однакової парності $(x+y)(x-y):4$.

Права ж частина рівняння такої властивості не має. У прикладі 3) рівність можлива лише при $x-y=1$, бо 2011 – просте число, але при $x=y+1$ квадратне рівняння $y^2+y=670$ не має натуральних коренів. В останньому прикладі добуток трьох послідовних натуральних чисел парний і кратний 3, а 2012 не ділиться на 3.

Метод зведення до діофантового рівняння ще раз окреслимо в задачі

22. Чи існує 2010-гранник, у якого 555 граней – трикутники, а решта граней – чотирикутники і шестикутники?

Розв'язання. Припустимо, що такий многогранник існує. Позначимо кількість чотирикутних граней через x , шестикутних – через y . Підраховуючи його ребра, маємо $555 \cdot 3 + 4x + 6y = 2 \cdot 2010$, звідки $555 \cdot 3 = 2 \cdot 2010 - 4x - 6y$. Остання рівність неможлива, бо ліва її частина – непарне число, а права – парне, тобто такий многогранник не існує.

Ще один блок – задачі на операції над числами, що все частіше потрапляють до розряду складних. Їх розв'язанню не сприяє, мабуть, наш комп'ютеризований час: учням все важче уявити алгоритм додавання чи множення чисел.

23. Натуральне число додали до числа, записаного тими ж цифрами, але в зворотному порядку. Чи могли в результаті одержати число з 2009 дев'яток?

Розв'язання. Відмітимо, що, якщо результатом додавання двох чисел є число з одних дев'яток, то це означає, що не було перенесень 1 в наступний розряд; дане число 2009-тицифрове й середня 1005-та цифра даного та утвореного чисел одна і та ж. Отже, у суми на цьому місці стоятиме парна цифра, тобто в результаті не може вийти число з одних дев'яток.

24. У натуральному числі довільно переставили цифри. Чи може сума отриманого числа з початковим дорівнювати 999...999 (2009 дев'яток)?

Розв'язання. Відмітимо, що як і в задачі 22, при додаванні чисел в жодному з розрядів не відбувається перенесення 1 в наступний розряд. Від перестановки цифр в числі сума його цифр S не змінюється, то ж шукана сума чисел, очевидно, має бути парною, рівною $2S$. За умовою вона має дорівнювати $2009 \cdot 9$, що неможливо.

25. Чи можна представити 1 у вигляді суми 1000 дробів, чисельники яких рівні 1, а знаменники – непарні числа?

Розв'язання. Не можна, бо чисельник отриманого дробу буде парним числом, а знаменник – непарним.

26. Добуток 10 чисел, кожне з яких 1 або -1, дорівнює 1. Довести, що їх сума не нуль.

Розв'язання. Припустимо, що сума дорівнює 0. Тоді серед даних чисел 5 "+1" і 5 "-1". Але тоді їхній добуток дорівнює -1, а за умовою він рівний 1. Протиріччя.

Отже, припущення про те, що сума дорівнює 0, не виправдалось. Звідси, сума даних 10 чисел не дорівнює 0.

27. Добуток 30 цілих чисел дорівнює 1. Довести, що їхня сума відмінна від 0.

Розв'язання. Оскільки добуток цілих чисел дорівнює 1, то ці числа можуть набувати лише значень -1 або 1. Щоб сума дорівнювала нулю, необхідно, щоб серед цих чисел було 15 одиниць і 15 мінус одиниць. Добуток цих чисел дорівнює -1. Суперечність. Отже, сума цих чисел відмінна від нуля.

28. У кожній клітці квадратної таблиці 101×101 записано число 1 або -1.

Знайдено добутки всіх чисел по рядках і стовпцях. Чи може сума всіх 202 одержаних добутків дорівнювати 0?

Розв'язання. Позначимо добуток всіх чисел i -го рядка ($i = 1, 2, 3, \dots, 101$) через a_i , а добуток всіх чисел j -го стовпця ($j = 1, 2, 3, \dots, 101$) – через b_j . Нескладно помітити, що добутки всіх a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 101$) і всіх b_j ($j = 1, 2, 3, \dots, 101$) рівні між собою і дорівнюють добутку чисел в таблиці. Отже, добуток $a_1 a_2 \dots a_{101} b_1 b_2 \dots b_{101} = 1$ (тобто квадрату добутку всіх чисел в таблиці). Звідси витікає, що сума цих 202 чисел (кожне з яких 1 або -1) не може дорівнювати нулю (бо інакше, серед них було б рівно 101 "-1" і 101 "1", і добуток всіх 202 чисел дорівнював би -1).

Узагальнюючи ці міркування, зрозумілим стає наступне завдання.

29. У кожному клітинку таблиці $n \times n$, де n – непарне, вписане одне з чисел 1 або -1. Під кожним стовпцем написаний добуток всіх чисел цього стовпця, праворуч

від кожного рядка – добуток всіх чисел цього рядка. Доведіть, що сума всіх $2n$ написаних чисел не дорівнює 0.

30. У вершинах куба розставили числа -1 або 1 . Потім в центрах кожної грані поставили числа, рівні добутку всіх чисел, що стоять у цій грані (тобто в чотирьох вершинах квадрата, що визначають цю грань). Довести, що сума всіх 14 чисел не може дорівнювати нулю.

Розв'язання. Проаналізуємо запропонований добуток 14 чисел. У нього входять 8 даних "вершинних" чисел і 6 "центрових", кожне з яких фактично є добутком 4 "вершинних", то ж зазначений добуток фактично є добутком даних 8 "вершинних" чисел, причому кожне зустрічається рівно 4 рази. Отже, добуток дорівнює 1, і завдання зводиться до розглянутих вище (26 та 27).

Подібні задачі можуть мати конструктивне, ігрове, динамічне навантаження.

31. Чи можна скласти магічний квадрат 4×4 із перших 16 простих чисел?

Розв'язання. Серед перших шістнадцяти простих чисел число 2 є єдиним парним числом. Сума чисел у рядку, де є двійка – непарна, а в решті рядків – парна. Отже, не можна.

32. Чи можна прямокутну дошку 5×7 клітинок заповнити прямокутниками 1×2 клітинок так, щоб ці прямокутники не перетиналися?

Розв'язання. Ні, бо площа дошки ($5 \cdot 7 = 35$ клітинок) є непарним числом, а сума площ прямокутників – парна.

33. Чи можна в таблиці 5×5 розставити 25 натуральних чисел так, щоб у всіх рядках суми були парні, а у всіх стовпцях – непарні?

Розв'язання. Не можна: порахуємо суму чисел у всіх рядках і у всіх стовпцях і порівняймо, адже це сума одних і тих же чисел.

34. Чи можна в таблиці 4×4 розставити натуральні числа так, щоб у всіх рядках суми закінчувалися на 5, а у всіх стовпцях на 0? А в таблиці 15×15 ?

Розв'язання. У таблиці 4×4 можна (наприклад, рис.1), а в таблиці 15×15 не можна, бо сума п'ятнадцяти сум чисел в рядках непарна, а сума п'ятнадцяти сум чисел в стовпцях парна. Але, відмітимо, що це сума одних і тих же чисел.

35. Десять шашок розміщено в ряд. Будь-які дві, що стоять через одну, можна міняти місцями. Чи можна переставити всі шашки в зворотному порядку?

Розв'язання. Пронумеруємо шашки (й відповідні місця, на яких вони стоять) у порядку розташування від 1 до 10. Зауважимо, що шашка, що стоїть на парному місці, може перейти лише на парне місце, а шашка, що стоїть на непарному, – тільки на непарне. Тому, зокрема, не вдасться поміняти місцями шашку, що стоїть на першому місці, з шашкою, що стоїть на десятому. Звідси, переставити шашки в зворотному порядку неможливо. Як бачимо, ідея зовсім проста: кожного разу ми порівнюємо числа різної парності, що приводить до суперечності.

36. На дошці написано в рядок 15 цілих чисел. Довести, що з них можна стерти одне число так, що сума чисел, які залишаться, буде парною. Чи вірно це для 16 чисел?

Розв'язання. Оскільки всього чисел 15, то парність кількості парних і непарних чисел різна. Зітремо одне з чисел, яких на дошці непарна кількість. Сума, що залишилася, буде парною, бо сума парної кількості як парних, так і непарних чисел парна. Підкреслимо, що тільки в одному з цих наборів непарна кількість чисел. Для 16 це невірно (наведіть приклад).

Бажано, щоб учні бачили можливість заміни чисел 15 і 16 іншими числами. Аналіз розв'язання повинен підказати і загальний результат для чисел m і k . У випадку ж великих значень m і k (наприклад, 2009 та 2010) доцільно почати з менших значень (5 – 6 або 7 – 8) із подальшим узагальненням.

37. У кожній вершині квадрата записано число. За один крок до кожного з двох чисел, розміщених на одному з ребер (будь-якому), додається по одиниці. Чи можуть через кілька таких кроків всі чотири числа стати рівними між собою, якщо спочатку в трьох вершинах записані нулі, а в четвертій – одиниця?

Розв'язання. Початкова сума всіх чотирьох чисел дорівнює одиниці, тобто є непарним числом. Після кожного кроку сума не змінює свою парність, тобто кожного разу матимемо непарне число. Якби нам вдалося прирівняти всі числа у вершинах квадрата, то сума їх була б парним числом. Отже, дістати однакові числа в вершинах квадрата неможливо.

38. На дошці написані натуральні числа від 1 до 25. Дозволяється стерти довільні 2 числа і записати модуль їх різниці. У результаті на дошці залишилося одне число. Чи може воно бути парним?

Розв'язання. На кожному кроці кількість непарних чисел, записаних на дошці, не змінюється або зменшується на два. Спочатку на дошці було записано 13 непарних чисел. Оскільки 13 непарне число, то на дошці залишиться непарне число.

39. Коник стрибає по прямій праворуч чи ліворуч, збільшуючи довжину кожного наступного стрибка на 1 см. Довжина першого стрибка 1 см, напрямом кожного стрибка вибирається навмання. Чи може коник після 25 стрибків повернутися в точку старту?

Розв'язання. Запишемо всі натуральні числа від 1 до 25 у рядок. Числу i ($i = 1, 2, \dots, 25$) надамо знак плюс, якщо на відповідному (i -тому) кроці коник стрибнув праворуч і мінус, якщо коник стрибнув ліворуч. Повернення коника у точку старту відповідає тому, що сума чисел дорівнює нулю. Сума всіх натуральних чисел від 1 до 25 дорівнює 325 – непарне число. Тому між цими числами не можна розставити знаки плюс і мінус так, щоб отримати нуль. Отже, після 25 стрибків коник не повернеться у точку старту.

Чимало задач, в яких доцільно застосувати принцип парності, пов'язано з шаховою дошкою або з таблицями, клітинки яких зафарбовано в різні кольори. Дійсно, зміна кольору клітинки еквівалентна зміні парності. Розглянемо кілька таких задач.

40. Із звичайної шахової дошки вилучили два протилежних квадрати великої чорної діагоналі. Чи можна частину дошки, що залишилася, покрити кісточками доміно без їх накладання?

Розв'язання. Кожна кісточка доміно покриває рівно одну білу і одну чорну клітинку. Для виконання умов задачі ми мали б покрити 32 білих і 30 чорних клітинок, що, очевидно, неможливо.

41. Чи можна ходом шахового коня потрапити з лівого нижнього кута шахової дошки у правий верхній, відвідавши кожне поле рівно один раз?

Розв'язання. Спочатку зауважимо, що лівий нижній кут і правий верхній кут шахової дошки мають чорний колір. Щоб відвідати всі 64 клітини шахової дошки, побувавши на кожному полі рівно один раз, кінь має зробити 63 ходи. За кожний хід кінь міняє колір поля. Число 63 – непарне. Тому після 63 ходів кінь буде на полі білого кольору. Відповідь: неможна.

Складнішими є задачі, в умовах яких безпосередньо не йдеться про пофарбування в кілька кольорів. Тому цілком доречно, виходячи з умови задачі, виконати таке пофарбування самостійно. Прийом різнокольорового пофарбування під час розв'язування логічних задач вказаного типу відіграє таку саму роль, як і допоміжні змінні в алгебрі або допоміжні побудови в геометрії.

42. Дно прямокутного басейну мають викласти плитками розміром 2×2 та 1×4 . З точно обрахованого набору загубили одну плитку 2×2 . Замість неї вдалось знайти плитку 1×4 . Чи можна тепер викласти дно басейна плитками?

Розв'язання. Розіб'ємо прямокутне дно басейна на квадрати розміром 1×1 і пофарбуємо деякі з них так, як показано на рис.2. Тоді в будь-якому квадраті розміром 2×2 пофарбованою виявиться одна клітинка 1×1 , а в будь-якому прямокутнику 1×4 – 0 або 2 таких клітинки. Парність числа заштрихованих клітинок збігається з парністю числа плиток розміру 2×2 й одна така загублена плитка залишає непокритою 1 заштриховану клітинку. Прямокутні ж плитки 1×4 можуть накривати лише парну їх кількість. Отже, така заміна не дозволяє виконати замовлення.

10	10	10	5
10	10	10	5
10	10	10	5
10	10	10	5

Рис. 1

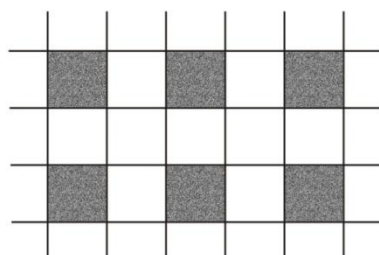


Рис. 2

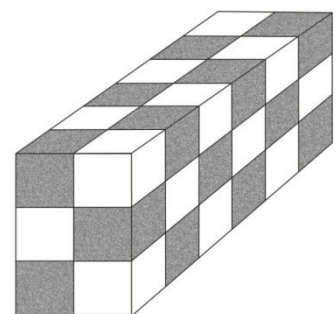


Рис. 3

43. Житловий відсік підводного човна має три поверхи. Каюти на кожному з них розташовані однаково: в два ряди по 6 кімнат. З кожної каюти є двері в усі сусідні з нею на цьому поверсі й люки у верхню і нижню каюти. Чи зможе капі-

тан човна пройти з кутової каюти першого поверху в каюту, що міститься в протилежному куті третього поверху, побувавши при цьому лише один раз у кожній каюті?

Розв'язання. Пофарбуємо каюти в білий і чорний кольори в шаховому порядку (рис.3). При цьому каюту, з якої починає свій шлях капітан, і кінцеву каюту, буде зафарбовано в один колір. Задача стала просторовим аналогом задачі 28. Дійсно, щоб потрапити з першої каюти в останню (всього кают 36) капітану треба виконати 35 переходів. Але, змінюючи колір каюти при кожному переході, перша і остання каюти матимуть різні кольори. Прийшли до протиріччя. Отже, капітан не зможе здійснити вказаний перехід.

44. Настя й Галинка по черзі зривають пелюстки з ромашки, домовившись зривати по одній або дві сусідніх. Виграє той, хто зробить останній хід. Чи має хтось із дівчаток виграшну стратегію?

Розв'язання. Якщо починає Настя, то Галинка завжди може виграти, швиденько підрахувавши загальну кількість пелюсток і зірвавши першим своїм ходом одну чи дві пелюстки таким чином, щоб решта пелюсток була парною (представляючи пелюстки ромашки точками на колі, їх множина має вісь симетрії). Надалі ходи Галинки мають бути симетричними ходам Насті.

Рекомендована література

1. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. – Киров : "АСА", 1994. – 272 с.
2. Коннова Е. Г. Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад. – Ростов на Дону : Легион, 2008. – 128 с.
3. Лейфура В. М. Математичні задачі евристичного характеру. – К. : Вища школа, 1982. – 91 с.
4. Мерзляков А. С. Четность и аналоги четности. – Ижевск : Издательский дом "Удмуртский университет", 2002. – 51 с.
5. Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики. – Чернівці: Підпр.Яворська, 2003. – 360 с.
6. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М. : "Наука", 1965. – 456 с.
7. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Вінниця : ВДПУ, 2000. – 266 с.