

Уроки продуктивного навчання. Парність під різним кутом зору

Сподіваємось, наш перший урок не був марним і кожний придбав щось нове, цікаве, корисне й, можливо, організувавши математичний гурток, встиг апробувати наші поради. Будемо вдячні й за критичні зауваження та пропозиції. Можливо, деякі завдання здались вам надто легкими. Чудово, втім, радимо не полишати увагою й їх, бо саме вони складають фундамент, є цеглинками подальших більш складних конструкцій. Якщо, навпаки, деякі не піддались із першого підходу, переконані, що з часом, набувши досвіду логічних міркувань, ваші вихованці опанують і їх. Головне – вірити у власні сили. Девізом же нехай будуть "цілеспрямованість, наполегливість, самостійність". Кілька порад викладачу:

Достатня кількість завдань надасть Вам можливість вибрати завдання для різних форм як групової, так і індивідуальної роботи, з урахуванням віку та підготовленості учнів.

Детальні розв'язання всіх завдань допоможуть створити набір завдань для самостійного опрацювання теми, домашнього завдання чи творчого конкурсу, сформулювавши наведені завдання іншими словами, змінивши числа чи фабулу.

Наш другий урок – знову парність, але під різними кутами зору.

Спробуємо побачити її в задачах на розбиття на пари, симетрію, чергування; розширивши світогляд, відчувати можливості парності в задачах із графами та інваріантами.

Розбиття на пари

Основний факт, пов'язаний з розбиттям на пари, полягає в тому, що:

- Елементи двох типів можна розбити на пари, по одному представнику кожного типу в парі, тоді і тільки тоді, коли кількість елементів обох типів однакова.

1. Чи можна намалювати ламану з 11 відрізків, так щоб кожний відрізок перетинався рівно з одним із інших відрізків?

Розв'язання. Якби це було можливо, то відрізки розбилися б на пари, що перетинаються. Але число відрізків ламаної непарне. Отже, неможливо.

2. Чи можна опуклий 11-кутник розрізати на паралелограми?

Розв'язання. Ні. Інакше його сторони розбилися б на пари паралельних між собою сторін, що неможливо.

3. Чи можна дошку розміром 5×5 заповнити доміношками розміром 1×2 ?

Розв'язання. Зрозуміло, що будь-яка доміношка займає рівно 2 клітки, тобто при повному покритті доміношками всі клітини дошки можна розбити на пари, й на дошці має бути парне число кліток. Проте це не так. Отже, покриття неможливе.

4. Весь комплект доміно виклали по правилах ігри в ряд. Відомо, що першою стоїть п'ятірка. Яка цифра стоїть останньою?

Розв'язання. По-перше відзначимо, що на всіх доміношках рівно 8 кліток з чистим ("порожнім") полем, 8 – з одиницею, 8 – з двійкою, ..., 8 – з шісткою. Після того, як ми розкладемо всі доміношки за правилами ігри в ряд, усі цифри на них розбиваються на пари. Оскільки кожної з цифр 0, 1, 2, ..., 6 – парна кількість, то для всіх цифр, окрім п'ятірки, яка є крайньою, буде пара. Отже, останньою цифрою також буде п'ятірка.

5. Чи можна викласти повний набір доміно без дотримання правил гри в ланцюжок так, щоб сума цифр на будь-яких двох сусідніх клітинках різних доміно була непарною?

Розв'язання. Очевидно ні, бо для цього кількість парних і непарних цифр на доміношках мала б бути однаковою або відрізнятися на 2 в залежності від парності цифр на кінцях. Ми ж маємо 24 непарних значення (1, 3, 5) і 32 парних (0, 2, 4, 6).

6. Всі натуральні числа від 1 до 100 розбиті на дві групи: парні і непарні числа. Визначити, в якій із груп сума всіх цифр, використаних для запису чисел, більша і на скільки?

Розв'язання. Розіб'ємо всі числа на пари: (1,100), (2, 3), (4,5),..., (98,99). Всього пар 50. У всіх парах, окрім першої, сума цифр у другого числа на одиницю більша, ніж у першого. Тому сума цифр, використаних для запису непарних чисел, на 49 більша, ніж для запису парних.

Симетрія

7. Многокутник з 97 вершинами має вісь симетрії. Довести, що ця вісь симетрії проходить через одну з вершин многокутника.

Розв'язання. Якби вісь симетрії не проходила через вершину, то число вершин мало б бути парним.

8. На дошці 23×23 клітинки знаходяться 23 фішки, розташовані симетрично відносно одної з діагоналей. Довести, що хоча б одна фішка знаходиться на цій діагоналі.

Розв'язання. Симетричні відносно діагоналі фішки утворюють пари. Число 23 – непарне. Тому хоча б одна фішка знаходиться на діагоналі.

9. Нехай виконуються умови попередньої задачі. Довести, що діагональ містить непарне число фішок.

Розв'язання. Число 23 не можна подати у вигляді суми двох парних чисел. Фішки поза діагоналлю утворюють пари, отже, число таких фішок парне. Тому на діагоналі стоїть непарне число фішок.

10. На дошці 23×23 клітинки знаходяться 23 фішки, розташовані симетрично відносно кожної діагоналі. Довести, що одна з фішок знаходиться на центральній клітині.

Розв'язання. Проведемо міркування від супротивного. Припустимо, що центральна клітинка вільна. Внаслідок симетрії, кожна з діагоналей містить парне число фішок; поза діагоналями – також парне число фішок. Але число 23 – непарне. Суперечність. Отже, одна з фішок знаходиться на центральній клітині.

11. У кожній клітинці квадратної таблиці 23×23 записане одне з чисел від 1 до 23 таким чином, що: 1) у клітинках, симетричних відносно діагоналі AB , що з'єднує верхню ліву вершину квадрата з нижньою правою, записані однакові числа; 2) кожний рядок таблиці містить всі числа від 1 до 23. Довести, що діагональ AB містить всі числа від 1 до 23.

Розв'язання. Кожне з чисел від 1 до 23 зустрічається у таблиці 23 рази. Нехай n – одне з натуральних чисел від 1 до 23. Внаслідок симетрії, це число зустрічається поза діагоналлю парне число разів. Тому хоча б один раз воно зустрінеється на діа-

гоналі AB . Таке міркування справджується для кожного з натуральних чисел від 1 до 23. Тому на головній діагоналі зустрічаються всі числа від 1 до 23.

Чергування

Запишемо основні факти, пов'язані з чергуванням, які можуть використовуватися при розв'язуванні завдань:

- При чергуванні по колу елементів двох типів кількість елементів обох типів має бути однаковою.
- При чергуванні в ряд елементів двох типів кількість елементів різних типів може відрізнятись не більше, ніж на 1.

12. По колу розміщено 20 корзин. Чи можна розкласти в них 99 кавунів, щоб кількості кавунів у будь-яких двох сусідніх корзинах різнились рівно на 1?

Розв'язання. Якщо в деякій із корзин парне число кавунів, то в сусідніх – по непарному. Таким чином, корзини з парною і непарною кількістю кавунів чергуються. Отже, рівно 10 корзин містять парне число кавунів і рівно 10 – непарне. Звідси, загальне число кавунів має бути парним. А у нас 99. Отже, такого бути не може.

Дещо змінимо умову задачі.

13. У корзинах, розставлених по колу, лежать кавуни, причому в будь-яких двох сусідніх корзинах число кавунів відрізняється на одиницю. Чи можуть бути так розставлені: а) 3; б) 4; в) 98; г) 99 корзин?

Розв'язання. Із розв'язання попередньої задачі необхідною умовою такого розташування є чергування корзин із парною та непарною кількістю кавунів. Тоді корзини можна розбити на пари. Для 3 і 99 корзин це неможливо, а для чотирьох і 98 можна, наприклад, якщо число кавунів чергується: $1 - 2 - 1 - 2 - \dots - 1 - 2$.

Розглянемо задачу, в якій поряд із чергуванням використаємо ще одну досить поширену ідею – розв'язання з кінця.

14. По колу розставлено 5 одиниць і 4 нулі. За один хід між кожними двома сусідніми числами пишуть модулі їх різниці, а всі старі числа стирають. Чи можна через кілька ходів одержати 9 нулів?

Розв'язання. Якщо б на певному кроці ми одержали 9 нулів, тоді на попередньому всі цифри на колі мали б бути рівними 1, але тоді за крок до цього мало б відбува-

тися чергування 0 і 1. Проте цього не може бути, бо цифр на колі 9, а необхідною умовою чергування є парність загальної кількості, або однакова кількість обох типів елементів, що чергуються.

15. Чи можна розставити по колу 2009 різних натуральних чисел так, щоб для будь-яких двох сусідніх чисел відношення більшого з них до меншого було б простим числом?

Розв'язання. Припустимо, що ми розташували дані натуральні числа по колу. Розкладемо кожне число на прості множники. З умови маємо: якщо деяке число має k простих множників, то його сусіди $k + 1$ або $k - 1$. Тобто, якщо в розклад одного числа входить парна кількість простих множників, то в розклад його сусідів – непарна. Рух по колу – це чергування парності числа простих множників у розкладі сусідніх чисел. Отже, у першого і 2009-го числа – однакова парність кількості простих множників. Але вони сусіди і за умовою мають відрізнятися рівно одним простим множником. Протиріччя, то ж задане розташування неможливе.

Наступне, просте за змістом, завдання також використовує ідею чергування, але здогадатися про це дещо складніше.

16. У Тані є 13 цукерок чотирьох типів: зефір, мармелад, шоколад і карамель. В очікуванні гостей дівчинка хоче розкласти їх по колу, щоб зефір і мармелад а також шоколад і карамель не виявились поряд. Чи впорається вона із завданням?

Розв'язання. Припустимо, що так. Спробуємо створити математичну модель задачі: зефір і мармелад позначимо через 1, а шоколаду й карамелі надамо значення 0. З умови завдання і нашого припущення виходить, що числа 1 і 0 чергуються по колу. Але через непарність їх загальної кількості це неможливо. Ми прийшли до суперечності! То ж впоратись із завданням дівчинка не зможе.

17. Катя і її друзі стали по колу. Виявилось, що обидва сусіди кожної дитини – однієї статі. Хлопчиків серед Катіних друзів – п'ять. А скільки дівчаток?

Розв'язання. Сусіди Каті – хлопчики. Сусіди цих хлопчиків – дівчатка. Таким чином, відбувається чергування хлопчиків і дівчаток. Отже, число хлопчиків в колі дорівнює числу дівчаток. Хлопчиків – п'ять, то ж і дівчаток у колі також п'ять.

Відповідь: серед Катіних друзів четверо дівчат.

Наступний невеликий цикл почнемо завданням

18. Чи можна 7 телефонів з'єднати між собою попарно так, щоб кожен був сполучений рівно з трьома іншими?

Розв'язання. Використаємо таке міркування: якщо ми розглядаємо об'єкти типу "мотузка" – відрізки, дроти, дороги, рукостискання, знайомства тощо, то при будь-якій кількості об'єктів число кінців має бути парним. Припустимо, що ми з'єднали 7 телефонів між собою попарно так, щоб кожен був сполучений рівно з трьома іншими. Порахуємо кількість кінців дротів, що сполучають ці телефони. Зрозуміло, що їх число має бути парним. У нашому випадку від кожного з 7 телефонів відходить 3 кінці, всього – 21 кінець (число непарне), отже, з'єднати між собою 7 телефонів так, щоб кожен був сполучений рівно з трьома іншими, неможна.

Зазначимо, що цю та подібні задачі, в яких мова йде про деякі об'єкти та певний зв'язок між ними, зручно розв'язувати з допомогою схем. 7 даних об'єктів (телефонів) зобразимо точками і спробуємо з'єднати їх між собою за допомогою 21 дуги (дротика) за умови, що з кожної точки виходить рівно 3 дуги.

В загальному випадку множину точок і дуг (відрізків, ліній), що сполучають деякі з цих точок, називають графом. Точки називають вершинами графа, дуги, що з'єднують вершини, – ребрами графа. Число ребер, що виходять із вершини A називають степенем цієї вершини і позначають $d(A)$. Вершину графа називають парною, якщо з неї виходить парне число ребер, і непарною – якщо виходить непарне число ребер.

Новим для нас фактично є лише слово "граф". Математичні об'єкти, які воно описує, нам добре відомі. Так, будь-який відрізок – це граф із двома вершинами і одним ребром, трикутник – граф із трьома вершинами, кожна з яких має степінь 2, оскільки з кожної виходить рівно 2 ребра. Дві точки – це знову граф, який має 2 вершини й не має ребер. Графами є каркасні моделі піраміди, куба тощо. Поза сторінками підручника – знайомі схеми автомобільних доріг, ліній метрополітену, електричні схеми, бабусині мереживо чи вишивка.

Темі "Графи" ми присвятимо окреме заняття. Сьогодні – лише один фрагмент – поєднання двох ідей.

Графи і парність

Розглянемо задачу.

19. Учасники математичної олімпіади, познайомившись, обмінялись конвертами з адресами. Доведіть, що

а) число вручених конвертів є парним;

б) число учасників, які обмінялись непарною кількістю конвертів, є парним.

Розв'язання. Учасників олімпіади, що обмінювались конвертами, позначимо точками $A_1, A_2, \dots, A_k$. Це вершини графа. Ребрами з'єднуємо ті вершини, що відповідають учням, які обмінялись конвертами. Степінь кожної вершини – число конвертів, що передав відповідний учасник своїм знайомим. Підрахуємо загальну кількість вручених конвертів N :

$$N = d(A_1) + d(A_2) + \dots + d(A_k).$$

З іншого боку, N – це подвоєна кількість ребер, бо кожне ребро з'єднує дві точки, тобто двох учасників, а, отже, і два конверти. То ж $N = 2p$, де p – кількість ребер.

Таким чином, ми довели пункт а), що число вручених конвертів є парним.

Але тоді парність суми N можлива лише у випадку, коли кількість непарних доданків парна. А це і є пункт б), виражений мовою графів. Отже, число учасників, які обмінялись непарною кількістю конвертів, є парним.

Розв'язуючи задачу 19, ми довели дві теореми.

Теорема 1. Сума степенів усіх вершин графа – число парне й дорівнює подвоєній кількості його ребер.

Теорема 2. Число непарних вершин графа парне.

Доведену теорему 2 часто називають теоремою про рукостискання або формулюють її у вигляді задачі:

20. Кожна людина, що колись жила на Землі, обмінялася з іншими людьми певним числом рукостискань. Довести, що число людей, що мали непарне число рукостискань, парне.

Повертаючись до задачі 18, наведемо інший спосіб її розв'язання. Маємо граф, у якого 7 непарних вершин, що не узгоджується з теоремою 2. Отже,

з'єднати між собою 7 телефонів так, щоб кожен був сполучений рівно з трьома іншими, неможна.

Розглянемо ще кілька задач.

21. Чи можна з'єднати 11 міст дорогами так, щоб із кожного міста виходили 3 дороги?

Розв'язання. Прийнемо за вершини графа міста, а за ребра – дороги між ними. Маємо, що всі 11 вершин графа непарні, та за доведеною теоремою 2 такого бути не може. Отже, подібне розташування міст і доріг неможливе.

22. Чи можна розташувати на площині 7 прямих так, щоб кожна перетинала рівно п'ять інших?

Розв'язання. Відхилившись від стереотипу, за вершини графа прийнемо прямі. Дві вершини з'єднуємо ребром, якщо відповідні їм прямі перетинаються. За умовою з кожної із 7 вершин має виходити 5 ребер, що протирічить теоремі 2. Отже, таке розташування прямих неможливе.

Більш складним є завдання

23. Зібралася компанія з n чоловік. Кожен знайомий з трьома іншими. При яких n це можливо?

Розв'язання. При $n = 4$ це, очевидно, можливо. Якщо n кратне 4, то, розбиваючи всіх на четвірки, отримуємо потрібне. Якщо $n = 6$, то це також можливо: для цього достатньо взяти 6 точок на колі (граф з шістьма вершинами) і з'єднати кожную точку з трьома, не сусідніми з нею. Тепер нескладно познайомити всіх і у випадку, коли $n = 4k + 2$. Для цього розбиваємо всіх на $(k - 1)$ групу з 4-х чоловік і одну з 6. Для непарного n цього зробити не можна за теоремою 2. Отже, зазначена компанія можлива лише для парного числа n .

Парність як інваріант

Розглянемо ще один блок завдань, пов'язаних з парністю, в яких мова йде про перетворення системи елементів, тобто про перехід її з одного стану в інший. Зазвичай є деякі числові характеристики, які не змінюються при таких перетвореннях. Їх називають інваріантами. Одним із таких (найбільш простих і разом із цим найбільш поширених) інваріантів і є парність.

Спочатку зовсім простий приклад.

24. Деяке натуральне число подвоїли, потім додали одиницю. Знов отримане число подвоїли і додали одиницю. Описану операцію повторили сто разів. Чи може одержане число ділитися на 2010?

Розв'язання. Нескладно відмітити, що в результаті кожної операції подвоєння і збільшення на одиницю ми отримуємо непарне число. Ця властивість весь час зберігається, тобто інваріантом при даній операції є непарність результату операції. Отже, отримати парне число, яке ділилося б на 2010, в результаті виконання даної операції не можна.

Наступні завдання також нескладні.

25. Дано 6 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Дозволено до будь-яких двох із них додати по 1. Чи можна зрівняти числа, повторивши операцію кілька разів?

1. *Розв'язання.* Нам треба, щоб всі шість чисел стали рівними. Проте, при кожній операції ми додаємо до чисел дві одиниці, отже, не змінюємо парність суми. За умовою сума чисел дорівнює 21. Вона непарна і залишатиметься такою весь час. Отже, зрівняти всі шість чисел у такий спосіб ми не зможемо.

26. Числа від 1 до 10 виписали у рядок. Чи можна розставити між ними знаки плюс і мінус так, щоб сума дорівнювала нулю?

Розв'язання. Розглянемо довільну розстановку знаків і замінимо всі знаки "-" на "+". Що відбувається при цьому? Очевидно, при зміні знака доданка на протилежний сума змінюється на парне число, парність же результату не міняється, тобто є інваріантом. Отримавши між числами всі плюси, знайдемо суму всіх натуральних чисел від 1 до 10: $1+2+\dots+10=55$ – непарне число. Отже, початкове число також було непарним і це не міг бути 0. (Можна було відразу відмітити, що в наборі непарне число непарних чисел, то ж сума завжди є непарною.)

Розглянемо дещо складніше завдання.

27. На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 13. За один хід дозволяється стерти два числа, а замість них записати їхню суму або різницю. Через 12 ходів залишиться одне число. Чи може воно дорівнювати нулю?

Розв'язання. Поміркуємо: що впливатиме на появу останнього числа? Певно, що всі числа. Отже, якщо ми хочемо прослідкувати, що не змінюється при стиранні, то повинні обрати таку числову характеристику, яка охоплює всі числа. Які подібні характеристики ми знаємо? Найпростіші – сума всіх чисел або їх добуток.

Простежимо за сумою. Спочатку сума всіх чисел $S=91$ і є непарною. Випробовуючи різні пари чисел (4 і 2, 5 і 8, 3 і 11, наприклад), помічаємо, що парність S при будь-яких ходах не змінюється. Тому можна припустити, що парність суми чисел S і є інваріант. Але це ще гіпотеза, яку потрібно довести. В загальному випадку при заміні чисел a і b їх сумою загальна сума S не змінюється, заміна ж $a + b$ на $a - b$, очевидно, не змінює парності суми S . Отже, парність суми чисел на кожному кроці зберігається. Число S завжди буде непарним і одержати в результаті нуль неможливо.

Повернемось до серії задач про розташування чисел у вершинах квадрата чи куба, розглянутих у попередній статті. В них ми фактично використовували ідею інваріанта, не вживаючи цього терміну. Проаналізуємо, наприклад, задачу:

28. У кожній вершині куба записано число: в одній – одиниця, в решті – нулі. За один крок до двох чисел, розташованих на одному (будь-якому) ребрі, додається по одиниці. Чи можна у такий спосіб зрівняти всі числа?

Розв'язання. Ідея розв'язання – це пошук інваріанта. Ним у даному завданні є непарність суми чисел у всіх вершинах. На початку вона непарна, кожний крок (додавання двійки) не змінює парності. Отже, прийти до позиції, коли всі числа стануть рівними, а їх сума парною, ми не зможемо.

Використовувати інваріанти можна не тільки в задачах із числовими даними, а й так би мовити "знакових".

29. На дошці написано 10 плюсів і 13 мінусів. Дозволяється стерти будь-які два знаки і поставити замість них плюс, якщо знаки однакові, і мінус – в іншому випадку. Який знак залишиться після виконання двадцяти двох операцій?

Розв'язання. Можна виконати заміну знаків числами: замість "+" записати 1, а замість "-" -1. Дозволені перетворення підказують інваріант – добуток всіх чисел.

Він, очевидно, завжди буде дорівнювати -1 , то ж останньою залишиться -1 , або ж відповідний їй знак $-$.

30. На дошці було написано декілька плюсів і 13 мінусів. Дозволяється стирати будь-які два знаки і писати замість них плюс, якщо вони однакові, і мінус, якщо вони різні. Після багатократного виконання цієї операції на дошці залишився один знак. Який?

Розв'язання. Інваріантом є непарність кількості мінусів: при зазначених перетвореннях їх кількість або не змінюється, або зменшується на 2. Тому в кінці залишиться один мінус.

Значно складніше відстежити інваріант у задачах із переміщенням об'єктів (фішок, шашок, знаків, чисел) по секторах круга, особливо, коли необхідними є додаткові нумерація чи фарбування.

30. Круг розбито на шість секторів, у яких стоять 3 чорних і 3 білих шашки, по одній у кожному. За один хід дозволяється пересунути одну чорну і одну білу шашки на один сектор у протилежних напрямках. Чи можна за декілька ходів зібрати всі шашки в одному секторі?

Розв'язання. Пронумеруємо сектори від 1 до 6. Нехай S – це сума секторів, на яких стоять фішки з урахуванням кратності. Спочатку $S = 1+2+3+4+5+6 = 21$. Уважно прослідкуємо за її перетвореннями після кожного кроку: сума S або не змінюється, або змінюється на 6. Отже, сума була і залишатиметься непарною. Таким чином, інваріантом у такій моделі є непарність суми.

Якщо б вдалося зібрати всі фішки в одному секторі, то $S = 6k$, де k – номер сектора, тобто сума мала б бути парною. Протиріччя. То ж зібрати всі фішки в одному секторі не можна.

31. Круг розбито на 10 секторів, в кожному з яких стоїть фішка. Одним ходом дозволяється будь-які 2 фішки пересунути в сусідні сектори: одну за годинниковою стрілкою, іншу – проти. Чи можна зібрати всі фішки в одному секторі?

Розв'язання. Розфарбуємо сектори в шаховому порядку (білий - чорний). У всіх п'яти білих секторах, так само, як і в п'яти чорних, рівно по 5 фішок. Якщо ми

припустимо, що всі фішки можна зібрати в одному з секторів, наприклад білому, тоді ми маємо прибрати всі фішки з чорних секторів.

Що ж відбувається при перестановці фішок?

Якщо обидві фішки, що пересуваються, стоять в одноколірних секторах, то після пересування число фішок у секторах одного кольору зменшується на два, а в інших збільшується на два, тобто парність числа фішок в секторах одного кольору не змінюється: на білих і чорних секторах весь час стоїть непарне число фішок.

Якщо дві фішки, що пересуваються, стоять в різноколірних секторах, то знову після переміщення число фішок в секторах кожного кольору не зміниться. Отже, не зміниться і парність загального числа фішок в секторах кожного з кольорів.

Таким чином, звільнити всі 5 секторів одного кольору не можна, то ж і зібрати всі фішки в одному секторі також не можна.

Зазначимо, що розглянуту вище задачу 30 також можна було розв'язати за допомогою аналогічних міркувань (бажано проробити це самостійно). Ми ж запропонували іншу модель задачі й відповідно віднайшли інші інваріанти.

Рекомендована література

1. Березина Л. Ю. Графы и их применение. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.
2. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. – Киров : "АСА", 1994. – 272 с.
3. Гусев В. А., Орлов И. А., Розенталь А. Л. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах: Книга для учителя. / Под ред. С. И. Шварцбурда. – М. : Просвещение, 1984. – 284 с.
4. Ионин Ю. И., Курляндчик Л. Д. Поиск инварианта // Квант, 1976, №2. – С.32-35.
5. Мерзляков А. С. Четность и аналоги четности. – Ижевск : Издательский дом "Удмуртский университет", 2002. – 51 с.