**0965653335**  (Тетяна Володимирівна Бернацька, ВІППО)

2016 -2017 н. р.

**Готуємося до математичних змагань**

**(олімпіад, конкурсів, турнірів)**

**Перекладання предметів**

* 1. Покладіть на стіл три купки сірників. В одну купку – 11 сірників, у другу – 7. У третю – 6. Перекладаючи з будь-якої купки в будь-яку іншу. Чи можна за три операції зрівняти всі три купки, щоб у кожній було по 8 сірників, якщо в будь-яку купку дозволяється додавати стільки сірників, скільки в ній є?
	2. Покладіть на стіл три купки сірників. В одну купку – 11 сірників, у другу – 7. У третю – 6. Перекладаючи з будь-якої купки в будь-яку іншу. Потрібно за три операції зрівняти всі три купки, щоб у кожній було по 8 сірників. У будь-яку купку дозволяється додавати стільки сірників, скільки в ній є.
	3. У трьох купках міститься 22, 14 і 12 сірників. Чи можна за три перекладання зрівняти число сірників у кожній купці, додержуючись при цьому умови: з будь-якої купки дозволяється перекладати в іншу лише стільки сірників, скільки їх є в другій купці?
	4. У трьох купках міститься 22, 14 і 12 сірників. Потрібно за три перекладання зрівняти число сірників у кожній купці, додержуючись при цьому умови: з будь-якої купки дозволяється перекладати в іншу лише стільки сірників, скільки їх є в другій купці.
1. На столі лежать три купки сірників. В одній купці 5 спичек, у другій – 49 сірників, а в третій – 51 сірник. З купками дозволяється виконувати такі операції: об’єднувати дві купки в одну і ділити купку з парною кількістю сірників на дві равні. Чи можна ли після декількох таких дій одержати 105 купок по одному сірнику в кожній?

**Стратегії. Ігри двох осіб**

* + 1. Миколка і Сашко виписують дванадцятицифрове число, ставлячи цифри по черзі, починаючи зі старшого розряду. Чи завжди зможе домогтися Сашко, щоб отримане число ділилося на 4 незалежно від того, які б цифри не писав Миколка?
		2. Миколка і Сашко виписують дванадцятицифрове число, ставлячи цифри по черзі, починаючи зі старшого розряду. Доведіть, що, які б цифри не писав Миколка, Сашко завжди зможе домогтися, щоб отримане число ділилося на 4.
		3. Сашко й Василько записують 30-цифрове число, використовуючи лише цифри 1, 2, 3, 4, 5. Першу цифру пише Сашко, другу – Василько й т. д. Василько хоче отримати число, кратне 9. Чи зможе Сашко йому завадити?
		4. Сашко й Василько записують 30-цифрове число, використовуючи лише цифри 1, 2, 3, 4, 5. Першу цифру пише Сашко, другу – Василько й т. д. Доведіть, що, які б цифри не писав Сашко, Василько завжди зможе домогтися, щоб отримане число ділилося на 4.
	1. Двоє гравців по черзі пишуть зліва направо цифри. Якщо після восьми ходів одержане восьмицифрове число ділиться на 9, то виграє другий гравець, інакше перший. Чи завжди зможе другий гравець виграти незалежно від того, як би не ходив перший гравець?
	2. Двоє гравців по черзі пишуть зліва направо цифри. Якщо після восьми ходів одержане восьмицифрове число ділиться на 9, то виграє другий гравець, інакше перший. Доведіть, що другий гравець завжди може виграти незалежно від того, як би не ходив перший гравець.
1. Двоє грають в наступну гру. Є 3 купки камінців: у першій – 10, у другій – 15, в третій – 20. За хід дозволяється розбити будь-яку купку на 2 менші. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто виграє при правильній грі: перший чи другий гравець?
2. На дошці написані 10 одиниць і 10 двійок. За хід можна витерти дві будь-які цифри і, якщо вони були однакові, написати 2, якщо різні – 1. Якщо остання цифра що залишилася на дошці – 1, то перемагає перший гравець, якщо – 2, то другий. Хто виграє при правильній грі: перший чи другий гравець?
3. Двоє гравців по черзі розставляють між числами від 1 до 20, записаних в рядок, «+» і «–». Після того як всі місця заповнені обчислюють результат. Якщо отримають парне число, то виграє перший гравець, якщо непарне, то другий. Хто виграє при правильній грі: перший чи другий гравець?
4. В одному ящику лежать 15 синіх кульок, а в другому – 12 білих. За один хід дозволяється взяти 3 синіх кульки або 2 білі. Перемагає той, хто бере останні кульки. Хто виграє при правильній грі: перший чи другий гравець?
В рядок виписані числа 1, 2, …, . При цьому числа 1 та  пофарбовані у синій колір, а всі інші – у жовтий. Двоє гравців – Олеся та Андрій – по черзі фарбують одне з жовтих чисел у синій колір за такими правилами: першим ходом Олеся (вона розпочинає) фарбує у синій колір будь-яке з жовтих чисел (позначимо його через ). Тоді Андрій обирає той з проміжків чисел (1, 2, …, ) чи (, , …, ), який містить більше жовтих чисел. Якщо ці проміжки за кількістю жовтих чисел однакові, то вибирається будь-який з двох проміжків. Якщо, наприклад, більшим є проміжок (1, 2, …, ), то інший проміжок у подальшій грі участі не бере. Після цього Андрій фарбує у синій колір будь-яке з жовтих чисел нового проміжку. Тепер новий проміжок також розділився на два менших. Далі Олеся для свого ходу вибирає той з двох нових проміжків, що містить більше жовтих чисел, а інший проміжок уже поза грою. І так далі. Перемагає у грі той з гравців, кому вдасться пофарбувати у синій колір таке число, у якого сусідні ліворуч та праворуч вже сині. Хто перемагає в цій грі при правильній грі обох гравців?

**КЛІТЧАСТІ ДОШКИ**

**Клітчасті дошки. Зафарбовування клітинок**

***Підготовчі вправи***

1. Чи можна прямокутник  розрізати на триклітинкові кутики?
2. Чи можна прямокутну дошку  розрізати на чотириклітинкові кутики -тетраміно?
3. Чи можна квадратну дошку  розрізати на чотириклітинкові кутики -тетраміно?
4. 1.1. – 1.4.
	* 1. Чи можна у квадраті розміром  зафарбувати  клітинок так, щоб у будь-якому квадраті  було зафарбовано не більше двох клітинок?
		2. Доведіть, що у квадраті розміром  не можна зафарбувати  клітинок так, щоб у будь-якому квадраті  було зафарбовано не більше двох клітинок.
		3. У клітчастому прямокутнику розміром  довільно зафарбували  клітинки. Чи завжди буде зафарбованою хоча б одна триклітинкова фігурка -триміно (у будь-якому розташуванні)?
		4. У клітчастому прямокутнику розміром  довільно зафарбували  клітинки. Доведіть, що завжди буде зафарбованою хоча б одна триклітинкова фігурка -триміно (у будь-якому розташуванні)?

1.3.

1.3.1. У клітчастому квадраті розміром  довільно зафарбували  клітинок. Чи завжди буде зафарбованою хоча б одна триклітинкова фігурка -триміно (у будь-якому розташуванні)?

1.3.2. У клітчастому квадраті розміром  довільно зафарбували  клітинок. Доведіть, що при цьому завжди буде зафарбованою хоча б одна триклітинкова фігурка -триміно (у будь-якому розташуванні).

1.4. Яке найбільше число клітинок у квадраті (– натуральне число), намальованому на клітчастому папері, можна зафарбувати так, щоб у жодному квадраті  не виявилося трьох зафарбованих клітинок?

1. У клітчастому квадраті розміром  ( – натуральне число) довільно зафарбували клітинки. Чи завжди буде зафарбованою хоча б одна триклітинкова фігурка вигляду (у будь-якому розташуванні)?

**Клітчасті дошки. Пересування фішок**

1. У квадраті *n×n* , що розбитий на *n2* клітинок, у деякій клітині лежить *n2* фішок. За один крок дозволяється з клітини, у якій знаходиться не менше двох фішок, пересунути по одній фішці у дві клітини, що симетричні відносно даної та мають з нею принаймні одну спільну точку. Чи можливо, щоб через декілька кроків у кожній клітині квадрата знаходилося рівно по одній фішці, якщо: а) *n =* 2016;б) *n =* 2017?

**Розбиття багатокутників на трикутники**

1. *а)* Опуклий семикутник хочуть розбити на трикутники, проводячи його діагоналі. Доведіть, що при цьому можна отримати 5 або 7 трикутників, але не можна дістати 6 трикутників.

*б)* Доведіть, що існує неопуклий семикутник, який можна розбити внутрішніми діагоналями на 6 трикутників. Внутрішньою діагоналлю многокутника $M $називається відрізок, що сполучає дві несусідні вершини  і не виходить за межі фігури .

**Елементарна теорія чисел**

1. Олеся вибрала п’ять чисел з множини {7 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 }. Вона повідомила їх добуток Павлику і попросила його визначити парність суми обраних нею чисел. Павлик відповів, що він не може цього зробити однозначно. Яким міг бути добуток обраних Олесею чисел?
2. Знайдіть найменше натуральне число, кратне 99, у десятковому запису якого є лише парні цифри.
3. Знайдіть найменше натуральне число, десятковий запис квадрата якого закінчується на 2016.
4. Чи існує 2016-цифрове число, перестановкою цифр якого можна одержати 2016 різних 2016-цифрових повних квадратів?
5. Чи знайдеться для будь-якого натурального *n* натуральне число, десятковий запис квадрата якого починається *n* одиницями, а закінчується якоюсь комбінациєю з *n* одиниць і двійок?

**Продовження** буде.