**Відношення і пропорції**

Завдання вчителя математики – переконати кожного учня в тому, що навіть мінімальний рівень математичних знань піднімає його на більш високий рівень людського спілкування. Математика формує інтелект як низку відповідних знань і здатність оперувати ними шляхом логічного мислення. Проте слід не забувати, що навчання для кожного учня має бути посильним, умотивованим, цілеспрямованим, а це можливо за умови всебічного врахування індивідуальних особливостей школярів.

Курс математики 6 класу – це своєрідний фундамент для отримання не тільки базової математичної освіти, а й необхідність для засвоєння матеріалу уроків хімії, біології, фізики та для повсякденного життя. Однією з найважливіших таких тем є тема «Відношення і пропорції». Головна мета вивчення теми – формування розуміння поняття відношення, пропорції, пропорційних залежностей, навчити розв’язувати рівняння та задачі на використання основної властивості пропорції та використання властивостей пропорційних залежностей.

Основні завдання вивчення теми:

* вчити учнів описувати поняття «відношення», «пропорційні величини»;
* формувати вміння знаходити відношення чисел і величин;
* формувати вміння знаходити невідомий член пропорції;
* формувати вміння записувати відсотки у вигляді десяткового і звичайного дробу, розв’язувати три основні види задач на відсотки;
* формувати вміння розв’язувати задачі на пропорційні величини і пропорційний поділ;
* продовжувати розвивати вміння класифікувати, узагальнювати інформацію, слухати товариша, аналізувати його відповідь;
* розвивати пам'ять, увагу, зв’язне мовлення;
* виховувати наполегливість.

Вивчення теми потрібно спланувати та організувати так, щоб після закінчення вивчення теми учні вміли:

* наводити приклади пропорційних величин;
* описувати поняття відношення, пряма пропорційна залежність, відсоток;
* формулювати означення відношення, пропорції, відсотка, основну властивість пропорції;
* розв’язувати завдання:
  + знаходження відношення чисел і величин;
  + знаходження невідомого члена пропорції;
  + запис відсотків у вигляді звичайного і десяткового дробів;
* розв’язувати три основні види задач на відсотки; задачі на пропорційні величини і пропорційний поділ.

Тема «Відношення і пропорції» надає великі можливості для розвитку в учнів розумових здібностей, обчислювальних навичок, активного розумового пошуку способу розв’язування задач, логічних зв’язків між елементами, тобто розвитку розумової діяльності школярів під керівництвом педагога.

Вивчення даної теми пропоную за таким планом:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | **Тема уроку** | **Кількість годин** |
| 1. | Відношення. Властивості відношень | 1 |
| 2. | Пропорції | 1 |
| 3. | Розв'язування рівнянь на основну властивість пропорції | 1 |
| 4-5. | Відсоткове відношення | 2 |
| 6-7. | Пропорційні величини | 2 |
| 8-9. | Задачі на пропорційний поділ | 2 |
| 10. | Розв'язування вправ. Самостійна робота | 1 |
| 11. | Розв'язування вправ узагальнюючого характеру | 1 |
| 12. | Контрольна робота | 1 |

Як свідчить досвід під час вивчення теми більшість учнів не запам’ятовують ні терміна, ні означення поняття відношення, воно залишається для них часткою або дробом. Аналогічні труднощі трапляються під час вивчення пропорції. Тому вчителю слід звернути увагу, що пропорцію утворюють чотири числа *а*, *b*, *с*,і *d*, які мають наступну властивість , так як основним у цій темі є не означення пропорції, а її властивість та розв’язування рівнянь і задач на основі властивості пропорції.

Відношення двох чисел – це частка від ділення першого з них на друге. Тому часто вважають, що відношення і частка – синоніми, тобто різні назви одного й того ж поняття. І все ж розглядувані поняття не зовсім ідентичні. Часткою зазвичай називають одне число – результат дії ділення. В рівності  є три числа, які називають відповідно діленим, дільником і часткою. Часткою даних чисел називають також запис . Така частка (ще не обчислена) є водночас і відношенням. Число 8 – значення цього відношення, але строго кажучи, не є відношенням. Бо коли б кожне окреме число називали відношенням, тоді треба було б і рівність двох чисел називати пропорцією. Насправді ж рівність  не прийнято називати пропорцією. Отже, вчителю бажано розрізняти поняття відношення і його значення. Однак, щоб не ускладнювати виклад, шестикласникам про такі нюанси краще не говорити.

Приступаючи до викладу цієї теми слід встановити міцні асоціації між діленим і попереднім членом відношення та дільником і наступним членом відношення. Іншими словами, оскільки відношення двох чисел є не що інше, як частка від ділення одного числа на друге, то члени відношення – відповідні члени дії ділення. Перший член дії ділення називається діленим, а перший член відношення – попереднім числом, бо він пишеться першим знаком перед дією ділення. Отже, попередній член відношення є діленим. Учні далі повинні сказати, що під наступним членом відношення слід розуміти другий член дії ділення, тобто дільник. Саме розуміння відношення можна тлумачити таким чином:

нехай маємо відношення  – це означає, що перша величина складається з трьох однакових частин, а друга – з чотирьох таких самих частин. Таке розуміння відношення значно полегшує учням розв’язувати задачі, в умові яких зустрічається відношення величин.

Традиційно пояснюють, що відношення показує, у скільки разів одне число більше від іншого, або яку частину становить одне число від іншого. Якщо вчитель має бажання пояснити це учням, слід уточнити: якщо , то відношення  показує, у скільки разів *а* більше за *b*; якщо ж , то відношення  показує, яку частину становить число *а* від *b*. При цьому не слід забувати, що таке твердження правильне тільки для додатних чисел.

Інколи говорять про «відношення трьох чисел», «відношення чотирьох чисел». Такі поняття краще не розглядати, а якщо й використовувати, то розуміючи, що на них основна властивість відношення не поширюється. Наприклад, значення виразів  і  не дорівнюють одне одному. З’єднуючи такі вирази знаком „ = ”, допускається груба математична помилка, адже значення першого виразу в 10 разів менше від значення другого виразу.

Слово пропорція – латинського походження, яке спочатку означало співвідношення, співрозмірність. І тепер його використовують не тільки в математиці. Часто говорять про пропорції розмірів людини, частин архітектурного або художнього твору тощо.

Як і кожна рівність, пропорція буває правильного або неправильною. Коли ж окремо про це не говорить, то мають на увазі правильні пропорції. Звичайно пропорція має 4 члени. Рівності ;  не прийнято називати пропорціями, хоч кожну з них легко можна подати у вигляді пропорції: ; .

Переважну більшість арифметичних задач, майже всі геометричні задачі про подібність фігур, багато фізичних, хімічних, економічних задач розв’язують, використовуючи поняття пропорції. Це дуже важливий матеріал, потрібний не тільки для всіх теоретичних і прикладних наук, а й для практики, тому його бажано опрацювати якомога краще.

Корисно окремо зупинитися на розв’язувані рівнянь, які мають вигляд пропорції, а також тих, які легко подати у вигляді пропорції. Наприклад, розв’язуючи рівняння , учень має усно уявити його у вигляді пропорції  і відразу писати .

Традиційно в школі з самого початку використовують два поняття: прямо пропорційні та обернено пропорційні величини. Однак у сучасній науці замість прямо пропорційні здебільшого вживається термін пропорційні. Під час вивчення даної теми основна увага звертається на пряму пропорційність величин, яку коротше називають пропорційністю. З оберненою пропорційністю шестикласників слід лише ознайомити і показати її використання на самих простих прикладах.

Особливу увагу вчитель має звертати на те, щоб учні зрозуміли поняття прямої пропорційної залежності, його варто вводити за допомогою такої задачі; зміст якої підкаже їм властивості цієї залежності. Новим для учнів є поняття «відповідне значення», яким учні користуються складаючи пропорцію для значень прямопропорційних величин.

Задачі на пропорційних поділ – це узагальнений вид задач на знаходження двох чисел за їх сумою та відношенням. У них пропонується поділити дану суму на частини, пропорційні двом даним числам. При вивченні теми учнів слід навчити розв’язувати загальний вид задач: ділити число на частини, пропорційні кільком, а не тільки двом даним числам. При цьому учнів слід ознайомити не з одним, а з декількома способами.

Вивчаючи тему потрібно навчити учнів використовувати пропорційні залежності, пропорцію для розв’язування задач на відсоткові розрахунки. У цій темі розв’язують три основні задачі на відсотки та задачі на обчислення зміни величин у відсотках. Останній тип задач складний для учнів тим, що є два значення однієї величини, і, знайшовши їх різницю, важко зрозуміти, на яке із двох значень потрібно ділити.

Вміння працювати з відсотками є необхідним для кожної людини. Тому слід більше розв’язувати побутових задач, щоб показати учням, що задачі на відсотки мають значну прикладну спрямованість.

Учнів обов’язково треба ознайомити з відсотками у такому обсязі, щоб вони вільно користувалися ними під час вивчення хімії, біології, суспільствознавства, економіки, а також у повсякденній діяльності.

У методичній літературі трапляються різні означення відсотків.

*Відсотком* числа називається сота частина цього числа.

*Відсоток* – це дріб зі знаменником 100.

*Відсотки* – це соті частини, записані особливим способом.

Одні означення означають поняття «відсоток», а інші – «відсоток числа». Проте в школі розглядають не лише відсотки числа, а й просто відсотки. Наприклад, часто ставиться завдання: виразити відношення у відсотках. Тому в означенні краще говорити не про відсотки числа, а просто про відсотки. Не слід згадувати і про особливий запис, так як учні не розуміють, який саме «особливий». Тому краще від учнів домогтися розуміння, що відсотком називається одна сота частина. Ознайомлюючи учнів з розв’язуванням задач на знаходження відсоткового відношення краще їх розв’язувати способом зведення до дробів або за допомогою пропорцій. Так як розв’язуючи їх способом зведення до одиниці, інколи доводиться говорити, наприклад, про 0,2 людини і т.п. А це не бажано.

Потрібно зорати 300 га поля. За перший день зорали 120 га. Який відсоток поля виорано за перший день?

*Перший спосіб (зведення до дробу)*

Знайдено відношення даних чисел і виразимо його у відсотках.



*Другий спосіб (складання пропорції)*

300 га – 100%

120 га – *х*%

Складаємо пропорцію:

; 

*Третій спосіб (зведенням до одиниці)*

На 1% припадає поля в 100 разів менше: (га)

Тому 120 га становлять 

Щоб забезпечити свідоме опанування новим матеріалом, слід активізувати знання учнів, провівши з ними бесіду, спрямовану на з’ясування того, на скільки глибоко учні розуміють основні базові питання, потрібні для вивчення теми. Щоб учні захопилися і зацікавилися новим матеріалом, потрібно в цікавій формі повторювати вивчений матеріал.

Особливу увагу під час вивчення теми слід приділити розв’язуванню усних вправ. Відпрацювання навичок виконувати завдання в усній формі допоможе учням глибше засвоїти тему, а вчителеві надає змогу швидко визначити рівень підготовленості класу до теми і визначити прогалини учнів у вивчені певного матеріалу.

Найефективніше усний рахунок застосовувати під час актуалізації опорних знань. Форми проведення усного рахунку можуть бути різні. Але не слід забувати, що шестикласник – це учень, якого слід зацікавити і спонукати до роботи на уроці, до вивчення чогось нового. Тому проводячи усний рахунок на уроці непогано було б частіше подавати його у вигляді гри.

**1. «Вірю – не вірю»**

1) Чи вірите ви, що відношення 5 до 15 дорівнює 3?

2) Чи вірите ви, що відношення 15 до 5 дорівнює 3?

3) Чи вірите ви, що відношення 15 до 25 дорівнює 0,6?

4) Чи вірите ви, що відношення 12 до 24 дорівнює 0,5?

(Учні піднімають на знак згоди зелені сигнальні картки, у протилежному випадку – червоні сигнальні картки).

**2. «Знайди помилку»**

Якщо учні погоджуються із записом на дошці, то піднімають сигнальну картку з « + », якщо ні, то з « – ».

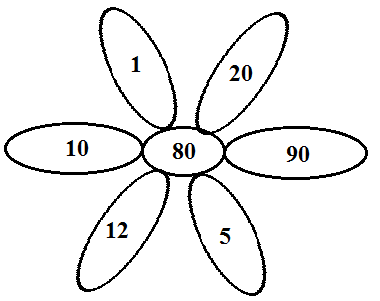
1) ; 2) ;

3)  – це відношення 2 до 8; 4) ;

5)  2:8=0,25.

**3. «Розумна квітка»**

Знайти відсотки від числа 80.



**4**. Встановіть відповідність між числом та його відсотком:

|  |  |
| --- | --- |
| А) 0,3 | 1) 30% |
| Б) 0,12 | 2) 3% |
| В) 2 грн | 3) 100 кг |
| Г) 1 ц | 4) 200 к |
|  | 5) 10 кг |
|  | 6) 12% |
|  | 7) 120% |

Правильна відповідь:

1643 – рік народження

І. Ньютона.

**5**. Число 10 поділити на:

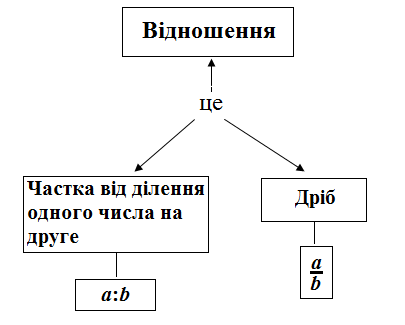
а) 2 частини, що відносяться як ; ; ;

б) З частини, що пропорційні числом: 1, 2, 2; 2, 3, 5.

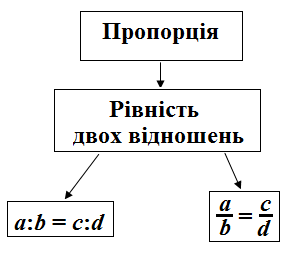
Під час вивчення теми учнів не завжди бачать зв'язок між елементами, що вивчають. Щоб виділити основні означення і допомогти учням їх запам’ятати слід використовувати опорні конспекти. Під час вивчення нового поняття, аналізуючи його, виділяють основні особливості, які послідовно пов’язані.

Наприклад:

1.



2.



Під час вивчення теми на деяких уроках доцільно давати учням пам’ятку-шпаргалку. Такі пам’ятки корисні для учнів, яким вивчення математики створює пені труднощі. Вони допомагають учням пригадувати алгоритми розв’язку завдань, розв’язувати задачі під час вивчення наступних тем і повторення навчального матеріалу.

|  |
| --- |
| **Відношення і їх властивості** |
| **1**. Знайдіть значення відношення  до .  Розв’язування.  **2.** Обчисліть відношення значень величин  до .  Розв’язування.  **3.** Спростіть відношення .  Розв’язування. . Поділимо кожен член поданого відношення на 150. Маємо: .  **4.** Замініть відношення  відношенням натуральних чисел.  Розв’язування. Помножимо обидва члени відношення на 10:    **5.** Замінити відношення  відношенням натуральних чисел.  Розв’язання. Зведемо дроби до найменшого спільного знаменника і відкинемо його.  . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Відношення і їх властивості** | |
| **1**. Означення  – відношення  до .  **2**. Що показує:  а) якщо , то  показує, яку частину становить  до ;  б) якщо , то  показує, у скільки разів  більше за .  **3**. Властивості:  а)  або б) .  **4**.  і  – обернені відношення. | Приклад  **1**.  – відношення 30 до 60;  – відношення 90 до 15.  **2**. а)  показує, що 3 становить від 4 –  частини;  б)  показує, що 5 більше від 3 у  рази.  **3**. ;  .  **4**.  обернене до , бо  і . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Пропорція. Основні властивості пропорції** | |
| **1**. Пропорція  або  **2**.  і  – крайні члени  і  – середні члени  **3**. Якщо в записі  ліва і права частини рівні, то – істинна пропорція.  **4**. Якщо  – істинна, то  і навпаки. | **1**. ;  – пропорції.  **2**.  **3**.  – істинна пропорція  не є істинною, бо ; ;  **4**.  – істинна, бо  – істинна, тому ; |

|  |  |
| --- | --- |
| **Відсоткове відношення двох чисел** | |
| 1. Знаходимо відношення чисел (ділимо).  2. Записуємо здобутий дріб у вигляді відсотка (множимо на 100) | Скільки відсотків становить 30 від 50?  1.  2. |
| Або | |
| від  становить |  |

Головне завдання вчителя – організувати активну самостійну пізнавальну діяльність учнів, навчити здобувати знання й застосовувати їх на практиці.

Вчителю слід пам’ятати слова К. Д. Ушинського «Жоден наставник не повинен забувати, що його найголовніший обов’язок полягає в привчанні вихованців до розумової праці, і що цей обов’язок більш важливий ніж передача самого предмета».

В умовах сьогодення самоосвітні навички необхідно формувати вже з 5 – 6 класу. Вивчаючи тему «Відношення і пропорції» вчитель може запропонувати різнорівневі інструкції кожному учню, які він повинен виконати під час вивчення певного матеріалу самостійно, враховуючи при цьому їх індивідуальні уміння і навички, психологічну готовність до самостійного оволодіння знаннями.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| І рівень  (початковий) | ІІ рівень  (середній) | ІІІ рівень  (достатній) | ІV рівень  (високий) |
| 1. Прочитати пара-граф | 1. Навести прикла-ди відношень з природознавства | 1. Вивчити матері-ал параграфа та підготувати пові-домлення про „зо-лоту пропорцію” | 1. Вивчити матері-ал і систематизу-вавти набуті знан-ня у вигляді алго-ритму, таблиці чи схеми |
| 2. Скласти план розповіді за абзаца-ми | 2. Підготувати іс-торичну довідку, користуючись ма-теріалом підручни-ка | 2. Скласти алго-ритм розв’язування задач на відсотки за допомогою про-порції | 2. Вибрати в під-ручнику задачі на обернено пропор-ційну залежність та їх розв’язувати |
| 3. Навести прикла-ди застосування відношень на прак-тиці | 3. Навести прикла-ди величин:  а) сталих;  б) прямо пропор-ційних;  в) обернено про-порційних | 3. Вибрати в під-ручнику задачі на прямо пропорційну залежність та роз-в’язати їх | 3. Скласти алго-ритм розв’язання задач на відсотки трьома способами |
| 4. Виписати виді-лені в підручнику поняття та скласти міні-словник термі-нів | 4. Виписати ре-цепти з кулінарної книги, де вико рис-товуються відно-шення | 4. Скласти алго-ритм розв’язування деяких рівнянь за основною властиві-стю пропорції | 4. Скласти міні-збірник задач на пропорційну за-лежність |

Слід звернути увагу, що вивчення даної теми дає широкі можливості урізноманітнення мотивації навчання, на що слід звертати особливу увагу під час вивчення математики.

Розвиток пізнавальної активності учнів, стимулювання їх до математичної діяльності, активізації мислення, посилення уваги до навчального матеріалу, підвищення працездатності залежить від створення мотивації пізнавальної діяльності на уроці. З метою посилення мотивації непоганий ефект справляють історичні факти, легенди, відомості з історії математики.

1. До XVI ст. пропорції записували словесно повністю або скорочено. В індійських рукописах ХІІ ст. пропорцію  записували так:



Середньовічні математики країн ісламу, які писали арабською справа на ліво, застосовували для запису три крапки: , що означає .

Видатний французький математик Рене Декарт записував цю пропорцію так: .

Сучасний запис за допомогою двох крапок і знака рівності ввів Г. Лейбніц у 1963 році.

2. Чи знаєте ви, що…?

За допомогою пропорцій розв’язували задачі ще в стародавні часи. Повну теорію пропорцій було створено в Стародавній Греції в IV ст. до н. е. переважно працями видатних старогрецьких учених, зокрема Евдокса Кнідського з м. Кніда. Учення про відношення і пропорції стародавні греки називали музикою, яку вважали галуззю математики. Вони знали, що чим слабкіше натягнуто струну, тим нижчий звук, який вона дає, а чим тугіше натягнута струна, тим вищий звук вона дає. Але в кожному музичному інструменті не одна, а кілька струн. Щоб усі вони під час гри звучали узгоджено, довжина їх частин, які дають звук, повинна перебувати в певному відношенні.

Поняття пропорційності мало і має широке застосування в мистецтві, архітектурі, живопису, скульптурі. Тут воно означає додержання певних співвідношень між окремими частинами споруди, картини, скульптури.

3. Презентація

«Я не просто пропорція. На думку Луки Пачолі, навіть божественна пропорція. Грекам я замінила теорію дійсного числа і таким чином допомогла створити найкращий шедевр – геометрію. Я – душа гармонії. У мене слава архітектора, міцність споруд, чудеса мистецтва. А німецький поет і філософ Адольф Цейзинг запевняє, що я просто паную в природі.»

Створення проблемної ситуації теж один із ефективних прийомів зацікавлення учнів вивченням нового матеріалу на уроці.

* Одного разу вчені знайшли в Індії давній математичний рукопис, після розшифровки якого їх зацікавив такий запис:

10 3 40 12

Як ви думаєте, що він означає?

(Це запис пропорції.)

* Вчитель звернувся до учнів за допомогою: заповнити звіт успішності.

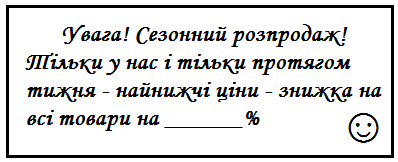
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Звіт успішності з математики за І семестр 2011-2012 н. р.** | | | | | |
| Клас | 6-Б | | 6-В | | Усього |
| Всього учнів | 25 учнів | % | 22 учнів | % |  |
| Високий рівень | 5 учнів | % | 2 учні | % |  |
| Достатній рівень | 10 учнів | % | 10 учнів | % |  |
| Середній рівень | 8 учнів | % | 7 учнів | % |  |
| Низький рівень | 2 учні | % | 3 учні | % |  |
| % якості |  |  |  |  |  |

Необхідно вміти знаходити відсоткове відношення двох чисел. Саме задачі на знаходження відсоткового відношення двох чисел є найпопулярнішим способом оцінювання змін, що відбуваються навколо нас.

* Уявіть, ви – директор магазину. Надворі кінець осені, початок зими. У магазині залежався літній одяг. Власник магазину поставив на літній товар знижену ціну.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Сукня | Майка | Шорти |
| Попередня ціна | 120 грн | 60 грн | 40 грн |
| Нова ціна | 72 грн | 36 грн | 24 грн |

Директор замовляє рекламу такого змісту:



Допоможіть рекламодавцям обчислити, на скільки відсотків знизились ціни на товари в магазині.

Формування особистості потребує, з одного боку, формування пізнавальної активності учнів, а з другого боку – розуміння математики не тільки як школи логічного мислення, але й джерела образів. У зв’язку з цим певна частина задач з математики повинна органічно пов’язуватись з географією, історією, культурою України. Відомо, що така додаткова інформація здатна позитивно впливати на пізнавальну діяльність школярів.

* Сьогодні у світі є 5000 мов і діалектів. Мови, що зникли, становлять 28% від цієї кількості. Скільки мов зникло за час існування людства?
* У кафедральній скарбниці на Вавелі (Краків, Польща) зберігається золотий Хрест часів княжої України, чудової роботи наших золотарів. Він увесь покритий орнаментом. Серед того чарівного орнаменту – самоцвіти і 100 перлів. Скільки самоцвітів має цей Хрест, якщо вони становлять 60% від кількості перлів?
* Дзвіниця Києво-Печерської лаври має 11 дзвонів. Вага найбільшого Братського дзвону становить 34% від ваги всіх дзвонів, Успенського – 20%, Орла – 11%, Благовісного – 3%, Раннього і найстарішого Балику – по 4%. Яка маса кожного із дзвонів окремо і скільки всіх 11 дзвонів, якщо маса названих 5 дзвонів – 1200 пудів?

З метою забезпечення мотивації навчальної діяльності кожне нове поняття чи твердження потрібно, за можливості, вводити в задачі практичного характеру. Такі задачі переконують учнів у потребі вивчати новий теоретичний матеріал і показують, що математичні абстракції виникають із задач, поставлених реальною дійсністю.

У процесі вивчення теми контроль знань і вмінь учнів можна проводити загально відомими способами: це і проведення математичних диктантів, тестів, навчаючих і контролюючих самостійних робіт. І звичайно рівень засвоєння теми перевіряється контрольною роботою.